Interacting Particle Systemsの繰り込みによる解析

東北大学情報科学研究科
乾　徳夫
高安　秀樹
A. Yu. Tretyakov

Abstract

We investigate the general case of a nearest neighbor interacting particle system in 1-dimension by using a real space-time renormalization approach. Discrete time branching annihilation random walk and basic contact process are included as special cases. We present an evidence that all nearest neighbor interacting particle systems involving 2nd order extinction-survival dynamical phase transition converge to contact process in the large scale limit, which is consistent with numerical results for branching annihilating random walk.

１.緒言

触媒反応や紛体運動、摩擦振動は非可逆系として興味深い研究対象である。これらは非平衡系であるにもにも関わらず、平衡系と良く似た相転移現象を示すことが知られている。これら動的相転移現象の本質的な機構を明らかにするために、簡略化された数学モデルを考えることにする。

動的相転移を示す簡単なモデルのなかで最もよく研究されている対象はContact Process（以下CPと略す。）［２］とBranching Annihilation Random Walk (BARW)［３］である。両者とも格子上で粒子の生成・消滅過程を記述するモデルであり厳密解は得られていない。

CPでは、ランダムに粒子を選んで確率pで隣接した空サイトに粒子を生成し、確率１-pで消滅する。pが小さい場合、全ての粒子は有限時間のうちに消滅する。一方pが大きいと、格子サイズが無限大の極限で、粒子は永遠に存在し続ける。この現象は、生存相と死滅相との間の典型的な動的相転移現象の例であり、平衡系と異となり詳細釣り合いの条件を満たさない。BARWはランダムに粒子を選び、隣接サイトに確率pで移動し、確率１-p

で粒子を生成する。その際、同じサイトに二個重なると対消滅するものとする。このモデルもCP同様の相転移をし臨界点近傍の粒子度はどちらも以下の冪関であらわすことができることが知られている。

$$\rho \propto |P_c - P|^{\beta} \qquad (1)$$

ここでP_cとβは臨界点、臨界指数を示す。既にコヒーレント異常法によりBARWとCPは同じにユニバーサリティ属すること示したが、本研究では、時空間繰り込みを用いて、BARW を特殊な場合として含んだ広い相互作用粒子系がマクロスケールにおいてすべてCPに収束することを明らかする。

2.理論解析

最近接相互作用粒子系のミクロなダイナミクスの最も一般的な規定は、以下に示す遷移行列により表現できる。記号1で格子が粒子で占められた状態を、また、0で空格子を表わすと、格子対の可能な状態は00、01、10、11の4通りである。左右対称性と全ての格子が空である状態を吸収点とする条件を付加すると遷移行列は一般に次の様に5つのパラメタによって表現できる。

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1\text{-}a\text{-}b\text{-}c & b & c \\ a & b & 1\text{-}a\text{-}b\text{-}c & c \\ d & e & e & 1\text{-}2e\text{-}d \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ここで遷移行列の各要素は以下ような事象の実現確率を表わす。

a：自発消滅　　01→00、10→00
b：ランダムウオーク　01→10、10→01
c：分岐（生成）　01→11、10→11
d：対消滅　　11→00
e：単独消滅　　11→10、11→01

特別な場合としてCPとBARWは1個のパラメタで次のように表す。ことができる。

CP：b=0,c=1-a,d=0,e=a/2

BARW：a=0,c=1-b,d=b,e=(1-b)/2

次に時間と空間を粗視化することにより遷移行列の各要素がどのように変化するかを見ていくことにする。まず、空間は2個の連続した格子を一個の粗視化した格子と見做す。

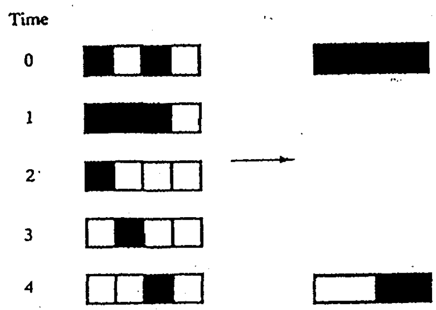
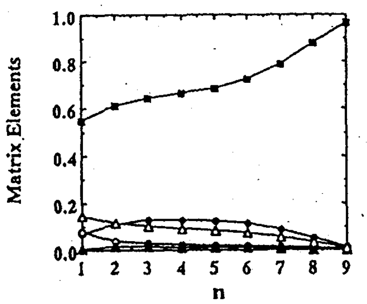


図1　時空間内のダイナミクスの粗視化

そして粗視化した格子の状態は内部の２個連続した格子が空の場合に限り空とする。時間方向の粗視化は、４ステップを繰り込んだ空間での１ステップと見做す。（図１）繰り込んだ空間での遷移行列要素を計算するには、連続した４個の格子のあらゆる初期状態から始めて、あらゆる経路をたどった４ステップ後の存在確率を求めばよい。

たとえば、繰り込んだ遷移行列要素のaは、ミクロな初期状態1100,1000,0100(繰り込むと全て同じく10 と見做される）から0000(繰り込むと00 と見做される）に遷移する確率を求めればよい。結果として、aはそれぞれの遷移確率に初期状態の存在確率を重みとして掛けあわせたものとして計算される。重みを計算するため平均場近似の境界条件を設定して定常解を求めた。

以上の計算法により得た結果を次に示す。繰り込みの初期値としてBARWの関係を仮定しパラメータｂ＝0.103とした時の繰り込み回数をｎとした時遷移行列の変化を図２に表す。この場合、確率ｃのみがｎとともに増加している。ｃは分岐確率を表し、粒子を増加させる傾向を持つ。一方、ｂ＝0.105より始めた場合、ｃは減少し、a,eが増加している。また、共通してb,dは減少している（図３）。



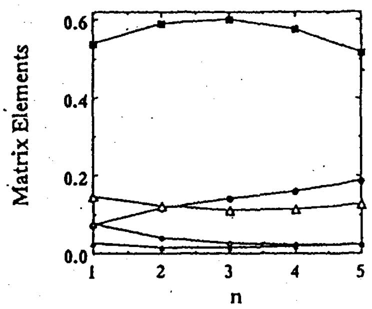


図２　生存領域における遷移行列要素の変化。
ｎは繰り込み回数　ａ：黒円、ｂ：白円
ｃ：黒四角、ｄ：黒三角、ｅ：白四角

図３　死滅領域における遷移行列要素の変化。
記号は、図２と同様。

繰り込んだ空間での粒子密度とｂは図４の様な関係になりｂ＝0.1048で明らかな相転移を示すことがわかる。（モンテカルロシミレーションによる臨界点は0.107 と推定されている。）繰り込みの初期値としてＢＡＲＷ以外から始めても、b,dは常に他の行列要素より小さくなることが示せる。
b,dは他の要素とは異なり１ステップで同時に二個の格子状態が変化する確率を表す。それを可能にするのは拡散の寄与である。ランダムウオークする粒子はＬ個の格子を移動するのにL^2時間必要であり、直観的に繰り込みの回数が増えるとb,dの寄与が相対的に減少することが理解される。

以上のことからマクロな状態を決めるパラメータは５から３に減少したが、本文のモデルが離散時間であるので単位時間を設定することによりさらにもうひとつ自由度下がる。ＣＰとの関連性を見るために、ａとｅの比を調べてみると初期値がどのような場合であっても繰り込みを続けると、この比は常に１／２に集束していることが確かめられる(図5）。すなわち、十分

繰り込んだ系の遷移確率は本質的に１個のパラメータで表すことができ、かつ、ＣＰとおなじ型の行列であることがわかった。

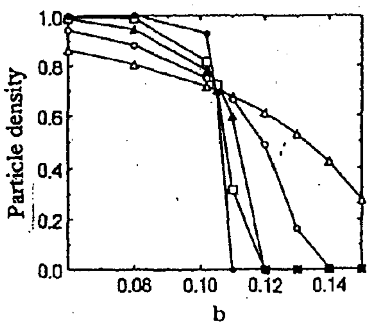


図4
パラメータbと定常状態における粒子密度の関係。
繰り込み回数の増加に伴い、顕著な相転移が
観察される。白三角形（n=3）、白円（n=4）
黒三角（n=5）、白四角（n=6）、黒円（n=7）

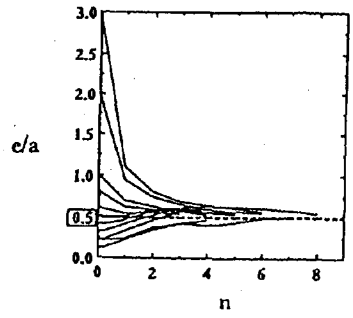


図5　b=d=0の条件下で、様々なa,c,eの組み合わせから出発した場合のe/aの繰り込みよる変化

3. 結語と問題点

結論として、ここで考えた系においては、ミクロに異なるダイナミクスに支配された系であっても時間と空間の粗視化によりマクロな状態はＣＰにより支配されていることが明らかになり、すべての系が同一のユニバーサリテイに属することがわかる。第一の問題点として時間と空間の繰り込みの比には任意性がある。空間に対して時間を長くとりすぎると有限サイズ効果により全ての粒子は消滅してしまう。一方短すぎると長距離相関を取り入れることができない。しかし、繰り込み時間を1ステップを変化させても定性的な結果は変化しないことが確認されている。第２は定常解を得る為に平均場を用いた点である。生存ー死滅型相転移では詳細釣り合いが成り立たない事が問題を複雑にしている。

ボンドディレクテッドパーコレーションＤＰは、通常のパーコレーションと異なりボンドに方向性を持たせいるモデルであるが、この系においては、無限クラスターができる確率をオーダーパラメータとすると相転移現象を示す。Reggon場理論を用いた解析により、ＤＰとＣＰは同じユニバーサリテイに属すことが示されている［４、５］。また我々のBAWのコヒーレント異常法により臨界指数を求めた結果［６］と合わせると１次元の動的な二体相互作用粒子系の生存・死滅型相転移の極めて広いクラスが、静的なモデルであるＤＰと同じユニバーサリテイに属すと予想される。

参考文献

［１］N.Inui,H.Takayasu and A.Yu.Tretyakov: FRCTALS(to be published)

［2］ T.E. Harris: Ann. Prob. 2, 969(1974).

［3］ M.Bramson and L.Gray:Z. Wahrsch. verw. Gebiete 68, 447(1985)

［４］ J. L. Cardy and R. L. Suger: J. Phys. A13, L423(1980).

［５］N.Konno and M.Katori:J.Phys. Soc.Jpn.59,1581(1990)

［６］N.Inui,H.Takayasu submitted to J.Phys.Lett.A